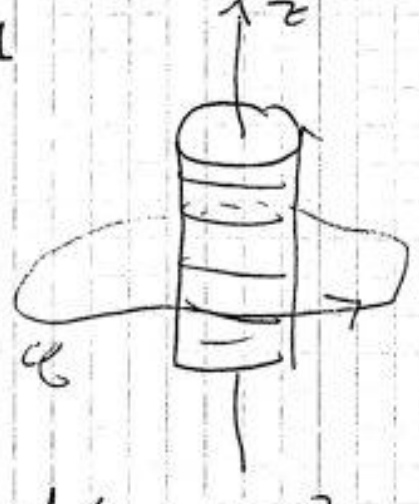
Correction des exercices
Induction électromagnétique

Exercice 1

1)



flux à travers 𝒞

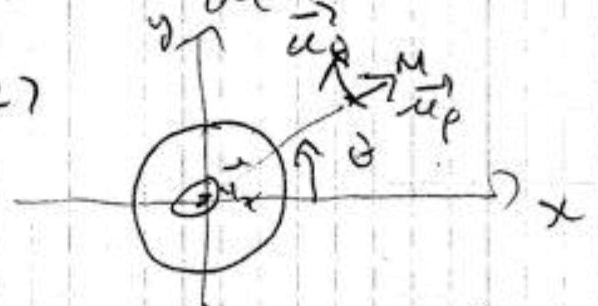
$\phi^{\mathcal{C}} = M i$ (on néglige l'auto-inductance de 𝒞)

$= \mu_0 n \pi R^2 i$

(calculé dans les feuilles sur l'inductance)

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \pi R^2 n \mu_0 I_0 \omega \sin \omega t$$

2)



Tout plan z = cste est un plan de symétrie ⇒ $\vec{E}$ est dans ce plan

$$\vec{E} = E_\rho \vec{u}_\rho + E_\theta \vec{u}_\theta$$

Invariance par translation le long de l'axe Oz ⇒ $\vec{E}$ ne dépend pas de z ⇒ E_ρ et E_θ ne dépendent pas de z.

Invariance par rotation autour de Oz ⇒ E_ρ et E_θ ne dépendent pas de θ (si M' est obtenu à partir de M en effectuant une rotation autour de Oz, $\vec{E}(M')$ est obtenu à partir de $\vec{E}(M)$ en effectuant la même rotation). Attention $\vec{E}$ dépend de θ (car $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ dépendent de θ)

Donc $\vec{E} = E_\rho(\rho,t)\,\vec{u}_\rho + E_\theta(\rho,t)\,\vec{u}_\theta$ a priori.

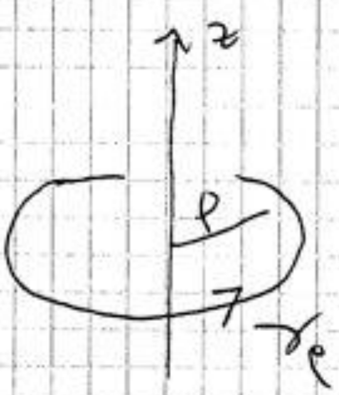
Th. de Gauss pour Σ = cylindre de rayon ρ_Σ entourant le solénoïde

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{charge totale} \\ \text{dans } \Sigma}}{0} = \underbrace{2\pi \rho_\Sigma H E_\rho(\rho_\Sigma)}_{\text{flux de } \vec{E} \text{ à travers } \Sigma}$$

$$\Rightarrow E_\rho = 0$$

Donc $\vec{E} = E_\theta(\rho,t)\,\vec{u}_\theta$

Loi de Faraday pour un cercle γ_ρ d'axe Oz de rayon ρ



$$\oint_{\gamma_\rho} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = e$$

fém calculée dans la question précédente

$$= 2\pi\rho E_\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{e(t)}{2\pi\rho}\vec{u}_\theta}$$

Remarque :

$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot d\vec{l}$ ne dépend pas du contour $\mathcal{C}$ entourant le solénoïde, et vaut $-\dfrac{d\Phi}{dt} = e$ dans tous les cas.

3) Dans le cas $\Phi = \mu_0 n i S$

$$e = \mu_0 n S I_0 \omega \sin \omega t$$

Comme précédemment, $\vec{E} = E_\theta(\rho,t)\,\vec{u}_\theta$

La loi de Faraday pour un contour $\mathcal{C}_\rho$ avec $\rho < R$ s'écrit $\oint_{\mathcal{C}_\rho} \vec{E}\cdot\vec{dl} = 2\pi\rho E_\theta = -\dfrac{d\Phi_{\mathcal{C}_\rho}}{dt}$

mais maintenant $\Phi_{\mathcal{C}_\rho} = \mu_0 n i \,\pi \rho^2$

$$\Rightarrow E_\theta = \frac{1}{2\pi\rho}\,\pi\rho^2\,\mu_0 n I_0 \omega \sin\omega t$$

$$= \frac{1}{2}\,\rho\, \mu_0 n \omega I_0 \sin\omega t$$

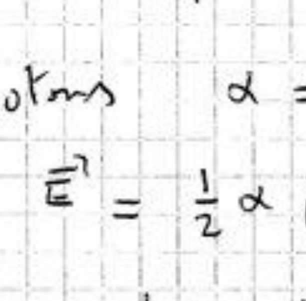
$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot\vec{dl}$ vaut nécessairement $e = \mu_0 n S I_0 \omega \sin\omega t$, et ce quelle que soit la forme de $\mathcal{C}$ (pourvu que l'aire de la surface entourée par $\mathcal{C}$ soit S).

Complément : il est instructif de vérifier ce résultat par un calcul explicite

Notons $\alpha = \mu_0 n \omega I_0 \sin\omega t$, et donc

$$\vec{E} = \frac{1}{2}\alpha\rho\,\vec{u}_\theta$$

on veut montrer que $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}\cdot\vec{dl} = \alpha S$ où S est l'aire de la surface entourée par $\mathcal{C}$



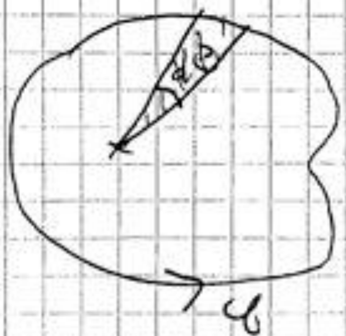
Paramétrisons $\mathcal{C}$ par $\rho(\theta)$

$M \in \mathcal{C}$, $\vec{OM} = \rho(\theta)\,\vec{u}_\rho$

$$\Rightarrow \vec{dl} = d\rho\,\vec{u}_\rho + \rho\, d\vec{u}_\rho$$

$$= \frac{d\rho}{d\theta}\vec{u}_\rho\, d\theta + \rho\,\vec{u}_\theta\, d\theta$$

Donc $\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{1}{2} \alpha \oint \rho \cdot \rho \, d\theta = \frac{1}{2} \alpha \oint \rho^2 \, d\theta$



Aire de la surface hachurée = aire d'un triangle isocèle de hauteur ρ et d'angle au sommet $d\theta$ $= \frac{1}{2}\rho^2 d\theta$

$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = \alpha \oint \underbrace{dA}_{\text{aire des triangles isocèles élémentaires}} = \alpha S$ OK ✓

Le même genre de calcul montre que $\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot \vec{dl} = e$ quel que soit le contour $\mathcal{C}$ à l'extérieur du solénoïde (remarque à la fin de la question 2).

Exercice 2

$e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$

Φ = flux du champ magnétique à travers le solénoïde

$\Phi = L I + M i$

auto-inductance du solénoïde (L) ; intensité dans le solénoïde (I)

M = mutuelle inductance entre le dipôle et le solénoïde

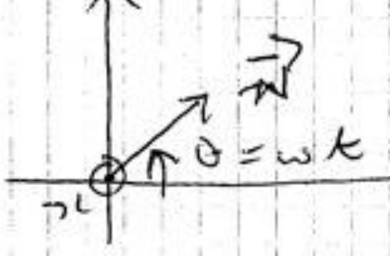
i = intensité circulant dans le petit circuit constituant le dipôle.

Pour calculer M, le plus simple est de calculer le flux du champ $\vec{B}$ créé par le solénoïde au travers du dipôle (on pourrait aussi calculer le flux de champ créé par le dipôle à travers le solénoïde, mais le calcul serait plus compliqué).

Le dipôle peut être vu comme un petit circuit d'aire s, $\vec{m} = i s \vec{N}$, $|\vec{N}| = 1$

$$\Phi_{\text{solénoïde} \to \text{dipôle}} = \vec{B} \cdot s\vec{N} = \mu_0 n I s \vec{u}_z \cdot \vec{N}$$

$$= \mu_0 n I s \sin \omega t$$



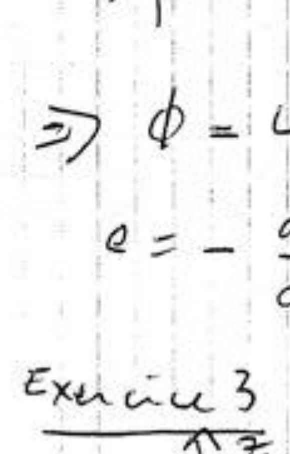
$$\Rightarrow M = \mu_0 n s \sin\omega t$$

$$\Rightarrow \Phi = LI + \mu_0 n |\vec{m}| \sin \omega t$$

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt} - \mu_0 n |\vec{m}| \omega \cos \omega t.$$

Exercice 3

1)



$\vec{B} = B(t)\vec{u}_z$

Arguments de symétrie + th. Gauss (comme dans l'exercice 1, question 2)

$$\vec{E} = E_\theta(\rho)\vec{u}_\theta$$

Loi de Faraday $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$

C = cercle d'axe Oz de rayon ρ

$$\Rightarrow 2\pi\rho E_\theta(\rho) = -\pi\rho^2 \frac{dB}{dt}$$

Donc $\vec{E} = -\frac{1}{2}\rho\frac{dB}{dt}\vec{u}_\theta$

Loi d'Ohm $\vec{J} = \gamma\vec{E}$

Puissance dissipée par effet Joule dans un volume élémentaire $d\tau$ du cylindre.

$$dP = \vec{J}\cdot\vec{E}\,d\tau = \frac{1}{4}\gamma\left(\frac{dB}{dt}\right)^2\rho^2\ \underbrace{\rho\,d\theta\,d\rho\,dz}_{\text{élément de volume } d\tau}$$

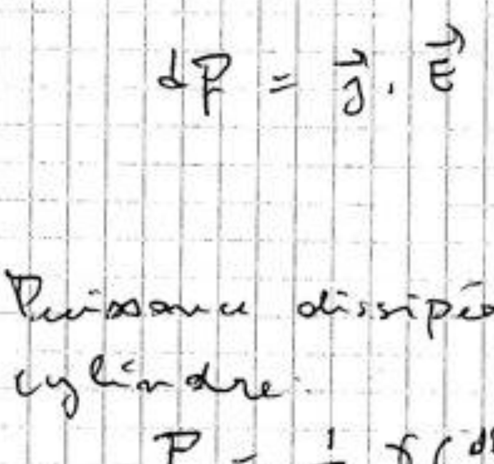
Puissance dissipée sur une hauteur h du cylindre.

$$P = \frac{1}{4}\gamma\left(\frac{dB}{dt}\right)^2 h\,2\pi\,\frac{1}{4}R^4 = \frac{\pi}{8}\gamma\left(\frac{dB}{dt}\right)^2 hR^4$$

Puissance dissipée par unité de volume :

$$\| \ p = \frac{P}{\pi R^2 h} = \frac{1}{8}\gamma\left(\frac{dB}{dt}\right)^2 R^2$$

2)



$\vec{B} = B\vec{u}_y$

Champ électromoteur $\vec{E}_m = \vec{v}\times\vec{B}$

$\vec{v} = \rho\omega\vec{u}_\theta$

$= \rho\omega(-\sin\omega t\,\vec{u}_x + \cos\omega t\,\vec{u}_y)$

$\vec{E}_m = -\rho\omega B\sin\omega t\,\vec{u}_z$

$$dP = \vec{J}\cdot\vec{E}_m\,d\tau = \gamma\omega^2B^2\sin^2\omega t\ \rho^2\ \underbrace{\rho\,d\theta\,d\rho\,dz}_{d\tau}$$

Puissance dissipée sur une hauteur h du cylindre.

$$P = \gamma\omega^2B^2\sin^2\omega t\ \frac{1}{4}R^4\,2\pi\,h$$

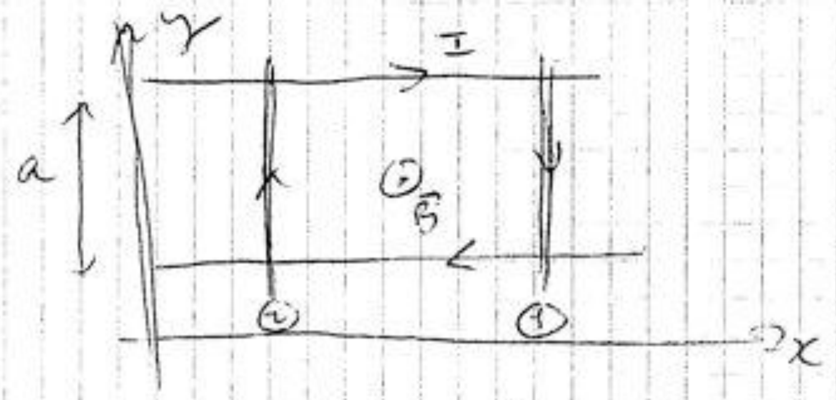
Puissance dissipée par unité de volume

$$\| \ p = \frac{P}{\pi R^2 h} = \frac{1}{2}\gamma\omega^2B^2R^2\sin^2\omega t$$

$\frac{1}{T}\int_0^T\sin^2\omega t\,dt = \frac{1}{2}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Puissance moyenne dissipée $\| \ \langle p\rangle = \frac{1}{4}\gamma\omega^2B^2R^2$

Exercice 4



1) On suppose que le mouvement de la barre ① est donné par $x_1 = v_0 t$.

Soit $x_2(t)$ la position de la barre ②

Le courant qui circule est donné par (en choisissant l'orientation du dessin)

$$I = \underbrace{\frac{1}{2R}}_{\text{résistance des 2 barres}} \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{B\,a\,(x_1 - x_2)}_{\text{flux de } \vec{B}}\Big) = \frac{aB}{2R}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

La force sur la barre ② est donc

$$\vec{F} = I a \vec{u}_y \times B\vec{u}_z = I a B \vec{u}_x$$

Donc

$$m\ddot{x}_2 = -\frac{a^2B^2}{2R}(\dot{x}_2 - v_0)$$

$$\ddot{x}_2 + \underbrace{\frac{a^2B^2}{2Rm}}_{\text{terme d'amortissement}} \dot{x}_2 = \frac{a^2B^2 v_0}{2Rm}$$

$$\dot{x}_2(t) = v_0\left(1 - e^{-\frac{a^2B^2}{2Rm}t}\right)$$

$$x_2(t) = x_2(t=0) + v_0 t + \frac{2Rm v_0}{a^2B^2} e^{-\frac{a^2B^2 t}{2Rm}}$$

2) On a $\begin{cases} I = \frac{aB}{2R}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ m\ddot{x}_2 = I a B \end{cases}$

quels que soient les mouvements des barres.

Supposons qu'on déplace 1 de L : $\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}_1 dt = L$.

2 se déplace de

$$L' = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{x}_2 \, dt = L - \frac{2R}{aB} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} I \, dt}_{= Q}$$

$= Q$ = charge totale qui circule dans le circuit

$$\ddot{x}_2 = \frac{aB}{m} \times \frac{aB}{2R}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$

Quand t est suffisamment grand, $\dot{x}_1 = 0$.
Cette équation implique donc que $\lim_{t\to\infty} \ddot{x}_2 = 0$

Mais alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{x}_2 \, dt = 0 = \frac{(aB)^2}{2mR}(L' - L) \Rightarrow L' = L.$$

3) Bilan d'énergie

$$W_{op} = \int b_{op} \dot{x}_1 \, dt = \int_{x_{1,0}}^{x_{1,0}+L} b_{op} \, dx_1$$

= travail de l'opérateur agissant sur la barre 1

$$b_{op} \underbrace{- I a B}_{\text{force de Laplace sur la barre 1}} = m\ddot{x}_1$$

$$\underbrace{I a B}_{\text{force de Laplace sur la barre 2}} = m\ddot{x}_2$$

(5)

$w_{op} = aB\int_{-\infty}^{+\infty} I \dot x_1 \, dt \left(= \int_{-\infty}^{+\infty} b_{op} \dot x_1 \, dt\right)$

car $\int_{-\infty}^{+\infty} \ddot x_1 \dot x_1 \, dt = 0$

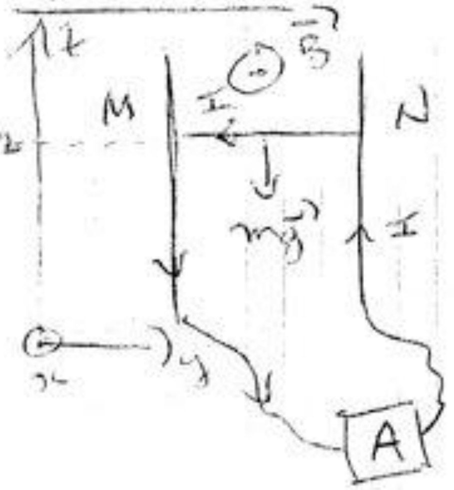
$= aB\int_{-\infty}^{+\infty} I(\dot x_1 - \dot x_2) \, dt$

(car $\int_{-\infty}^{+\infty} I \dot x_2 \, dt = \frac{m}{aB}\int_{-\infty}^{+\infty} \ddot x_2 \dot x_2 \, dt = 0$)

$= aB \, \frac{2R}{aB}\int_{-\infty}^{+\infty} I^2 \, dt = 2R\int_{-\infty}^{+\infty} I^2 \, dt$

= perte par effet Joule dans le circuit (qui est de résistance totale $2R$)

Exercice 5



$\vec B = B\vec u_x$ z = position de la barre

champ électromoteur sur la barre MN.

$\vec E_m = \dot z \vec u_z \times B\vec u_x$

$= B\dot z \, \vec u_y$

FEM sur le circuit

$e = -Bl\dot z$

Force de Laplace sur la barre : $\vec F = I l \vec u_y \times B\vec u_x$

$\vec F = +IlB\vec u_z$

1°) $\xrightarrow{I}$ [A] — = $\xrightarrow{I}$ || — (q, C)

$\begin{cases} u_{MN} = +Bl\dot z \underset{-rI}{} = \frac{q}{C} \\ m\ddot z = -mg + IlB = -mg + lB\frac{dq}{dt} \end{cases}$

$m\ddot z = -mg + lBC\left(-r\frac{dI}{dt} - lB\ddot z\right)$

$$\left(1+\frac{l^2B^2C}{m}\right)\ddot{z} + g = -rC\dddot{z}$$

r négligeable $\quad \ddot{z} = -\dfrac{mg}{m+Cl^2B^2}$

$$\dot{z} = -\frac{mg}{m+Cl^2B^2}\, t$$

$$z = z(t=0) - \frac{mg}{2(m+Cl^2B^2)}\, t^2$$

On a une "chute libre" avec une pesanteur "effective" $\quad g_{eff} = \dfrac{m}{m+Cl^2B^2}\, g$.

La charge du condensateur
$$q = \frac{mBlC\,g}{m+Cl^2B^2}\, t$$
croît linéairement avec le temps : le condensateur finira par "claquer".

2) 

e = fém induite $= \underbrace{-Bl\dot{z}}_{\text{fém non-électrique}} \underbrace{- L\frac{dI}{dt}}_{\text{fém électrique}}$

$$\begin{cases} L\dfrac{dI}{dt} = -rI - Bl\dot{z} \\ \ddot{z} = -g + \dfrac{lB}{m}\, I \end{cases}$$

$r=0$ $\quad \dfrac{dI}{dt} = -\dfrac{Bl}{L}\dfrac{dz}{dt} \Rightarrow I = -\dfrac{Bl}{L}(z - z_0)$

position initiale

$$\Rightarrow \ddot{z} = -g + \frac{lB}{m}\left(-\frac{Bl}{L}\right)(z - z_0)$$

$$\ddot{z} + \frac{l^2B^2}{mL}(z - z_0) = -g$$

$\omega^2 = \frac{l^2B^2}{mL}$, $z = z_0 - \frac{g}{\omega^2}(1-\cos\omega t)$

mvt oscillatoire !

Dans la réalité, il y aura perte par effet Joule car $r \neq 0$ et la barre finira par tomber. Néanmoins le cas $r=0$ donne une bonne idée du principe de la lévitation magnétique par un supraconducteur.

$r \neq 0$: $I = \frac{m}{lB}(\ddot{z} + g)$

$$\Rightarrow \frac{Lm}{lB}\dddot{z} = -\frac{rm}{lB}(\ddot{z} + g) - Bl\dot{z}$$

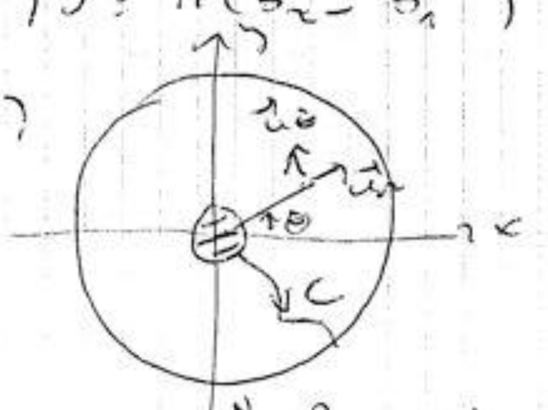
$$\ddot{z} = -g - \frac{L}{r}\dddot{z} - \frac{B^2l^2}{rm}\dot{z}$$

3) Fait en 1) et 2) !

Exercice 6

1) $S = \pi(b_2^2 - b_1^2)$; $\phi = BS$

2)



$\vec{E}_m = \vec{v} \times \vec{B}$ champ électromoteur

$= r\omega\,\vec{u}_\theta \times B\,\vec{u}_z$

$= \omega B r\,\vec{u}_r$

$$e = \int_M^N \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$$

C = n'importe quel chemin allant du moyeu à la périphérie de la roue (le résultat ne dépend pas de C)

$$e = \omega B \int_{b_1}^{b_2} r\,dr = \frac{1}{2}\omega B(b_2^2 - b_1^2) = \frac{\omega B S}{2\pi}$$

3) $\omega = \frac{v}{b_1}$, $u_{MN} = V_M - V_N = -e$

$$= -\frac{vBS}{2\pi b_1}$$

4) Le calcul ici est totalement similaire à celui effectué dans les feuilles "magnétostatique II", exercice 6.

Le couple est $\vec{\Gamma} = -\frac{I\Phi}{2\pi}\vec{u}_z$

5) $f b_1 = \frac{I\Phi}{2\pi} = \frac{ISB}{2\pi}$; $\vec{f} = -f\vec{u}_z$

6) On veut $I > 0$ donc $u_{MN} = U > 0$.

$$\begin{cases} RI = U + \frac{\omega BS}{2\pi} = U + \frac{vBS}{2\pi b_1} \\ \frac{IBS}{2\pi} = mg b_1 \end{cases}$$

$v/b_1 = \omega$

$v > 0$: mouvement de la masse vers le bas

$v < 0$: mouvement de la masse vers le haut

$$BS = \frac{2\pi m g b_1}{I}$$

$$RI = U - \frac{|v|}{2\pi b_1}\,\frac{2\pi m g b_1}{I} = U - \frac{|v| mg}{I}$$

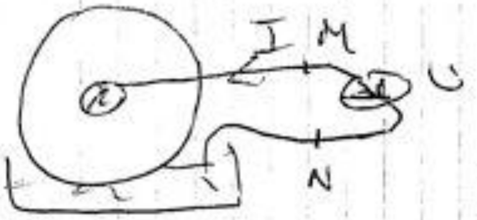
$$I^2 - \frac{UI}{R} + \frac{|v| mg}{R} = 0$$

$$\Delta = \frac{U^2}{R^2} - \frac{4|v|mg}{R}$$

$$\boxed{I = \frac{U}{2R} - \frac{1}{2R}\sqrt{U^2 - 4|v|mgR}}$$ (on choisit la valeur minimale de I)

A.N $I = 16\ A$, $B = 1{,}02\ T$

7) On a les mêmes équations qu'à la question précédente, mais maintenant le mouvement de la masse est vers le bas donc $v = |v| > 0$.
De plus on veut que la batterie se recharge. Il faut donc la brancher comme indiqué sur le schéma :
(polarité inversée par rapport à la question précédente).



Ainsi $I\, u_{NM} = -IU < 0$
(I est positif dans tous les cas car il faut compenser le couple dû à la masse).

$$\left.\begin{aligned} \frac{IBS}{2\pi} &= m g b_1 \\ R I &= -U + \frac{|v| BS}{2\pi b_1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow I^2 + \frac{UI}{R} - \frac{|v| m g}{R} = 0$$

La solution $I > 0$ est $I = + \frac{U}{2R}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4|v| m g R}{U^2}}\right)$

A.N $I = 13{,}8\ A$

$$B = \frac{2\pi m g b_1}{I S} = 1{,}19\ T$$